**Дата** 15.04.2020

**Преподаватель** Богачева М.О.

**Специальность** 49.02.01 Физическая культура (подготовка обучающихся с инвалидностью и ОВЗ)

**Группа** Ф-1с

**ОУД.04 Математика**

**Тема занятия:** Исследование функции с помощью производной.

**Задание 1.** Изучите и законспектируйте в тетрадь тему «Применение производной к исследованию функции».

***Конспект урока***

**1. Применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функции.**

На рис.1 функция возрастает, касательная к графику направлена вверх. Вспомним геометрический смысл производной: производная в точке $x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке: $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.
В данном случае $\operatorname{tg}\alpha > 0$ (если мысленно представим единичную окружность, то угол α расположен в 1 четверти, где $\operatorname{tg}\alpha$ положительный). Значит, можно сформулировать вывод:

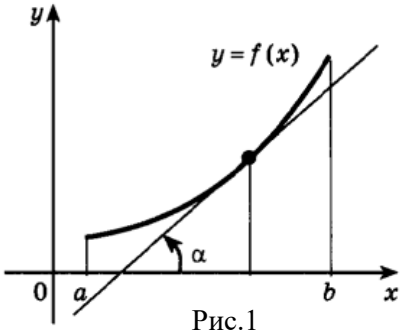


Рис.1

| |
|---|
| Если на некотором промежутке производная $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ ***возрастает*** на этом промежутке. |

На рис.2 функция убывает, касательная к графику направлена вниз.
В данном случае $\operatorname{tg}\alpha < 0$ (если мысленно представим единичную окружность, то угол α расположен в 4 четверти, где $\operatorname{tg}\alpha$ отрицательный). Значит, можно сформулировать вывод:

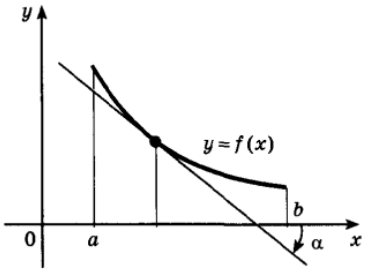


Рис.2

| |
|---|
| Если на некотором промежутке производная $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ ***убывает*** на этом промежутке. |

Промежутки возрастания и убывания называют **промежутками монотонности функции**.

**2. Применение производной к нахождению точек экстремума функции.**

**Экстремум** – это максимальное или минимальное значение функции.

**Точка минимума функции** – это точка, в которой значение функции меньше, чем в соседних точках.

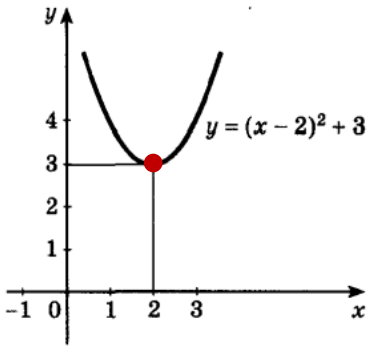



Рис.3

На рис.3 отмечена точка минимума функции: $x = 2$.

**Точка максимума функции** – это точка, в которой значение функции больше, чем в соседних точках.

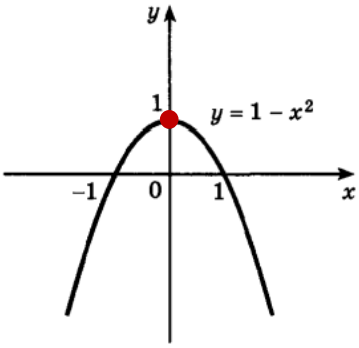



Рис.4

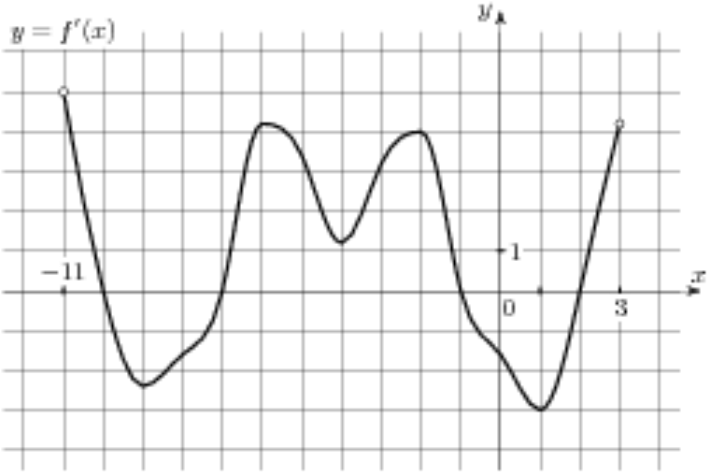
На рис.4 отмечена точка максимума функции: $x = 0$.

**Теорема.**
В точках экстремума (в точках максимума и минимума) производная функции равна нулю.

При переходе через точку максимума производная меняет знак с «+» на «–».
При переходе через точку минимума производная меняет знак с «–» на «+».

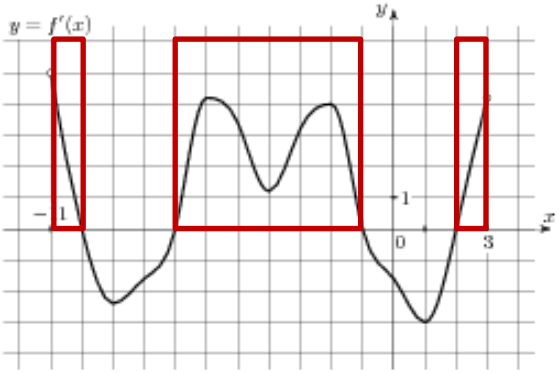
***Примеры выполнения заданий***

**1.** На рисунке изображен график производной функции $f'(x)$. Найдите:
1) промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$;
2) точки экстремума (точки максимума и минимума) функции $f(x)$.

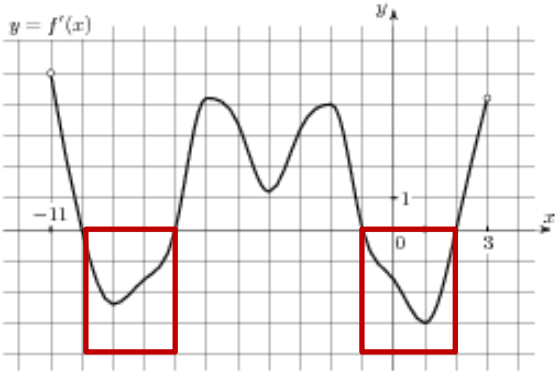


*Решение.*

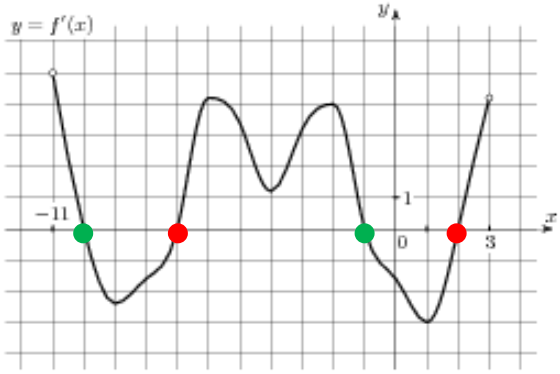
1) Функция возрастает, когда производная $f'(x) > 0$. По рисунку видно, что производная $f'(x) > 0$ (график лежит выше оси $Ox$ – эти области отмечены на рисунке) на промежутках (-11; -10), (-7; -1) и (2; 3). Значит, на этих промежутках функция возрастает.




2) Функция убывает, когда производная $f'(x) < 0$. По рисунку видно, что производная $f'(x) < 0$ (график лежит ниже оси $Ox$ – эти области отмечены на рисунке) на промежутках (-10; -7) и (-1; 2). Значит, на этих промежутках функция убывает.



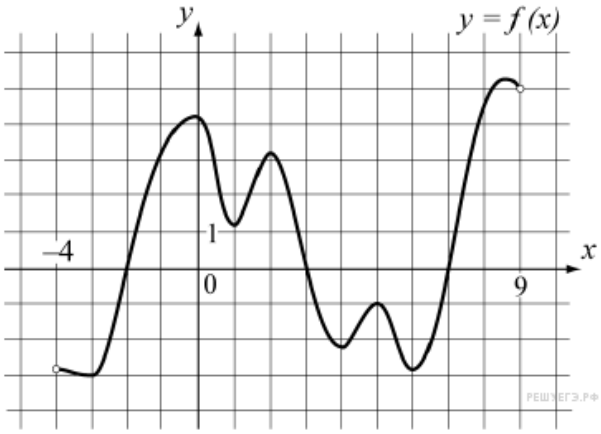

3) В точках экстремума (точках максимума и минимума) производная $f'(x) = 0$. Это точки, где график производной пересекает ось $Ox$. Таких точек 4: $x = -10, x = -7, x = -1, x = 2$.




В точках $x = -10, x = -1$ (отмечены зеленым цветом) производная меняет знак с «+» на «–», (график пересекает ось $Ox$ сверху вниз). Значит, это точки максимума.

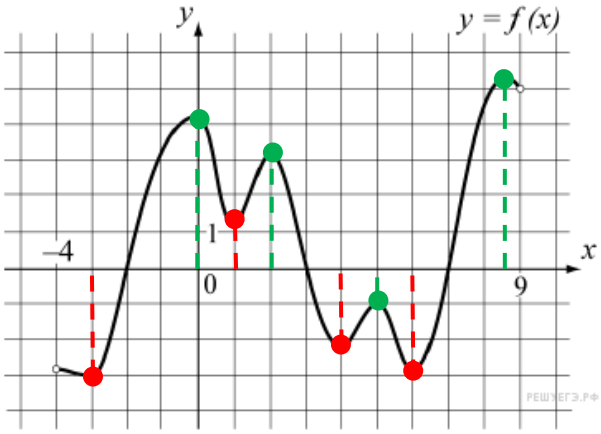
В точках $x = -7, x = 2$ (отмечены красным цветом) производная меняет знак с «–» на «+», (график пересекает ось $Ox$ снизу вверх). Значит, это точки минимума.

**2.** На рисунке изображен график функции $f(x)$. Найдите точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю.




*Решение.*

Производная функции равна нулю в точках экстремума, т.е. в точках максимума и минимума.




На рисунке зеленым отмечены точки максимума, красным – точки минимума. Всего их 8.

Точки максимума: $x = 0, x = 2, x = 5, x = 8{,}5$.

Точки минимума: $x = -3, x = 1, x = 4, x = 6$.

**3.** Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = 3x^2 - 2x$. Найдите точку экстремума и определите ее вид (точка максимума или точка минимума).

*Решение.*

Найдем производную заданной функции:

$f'(x) = (3x^2 - 2x)' = (3x^2)' - (2x)' = 3(x^2)' - 2(x)' = 3 \cdot 2x^{2-1} - 2 \cdot 1 = 6x^1 - 2 = 6x - 2.$

В точке экстремума производная равна нулю. Чтобы ее найти, решим уравнение:

$f'(x) = 0$

$6x - 2 = 0$

$6x = 0 + 2$

$6x = 2$

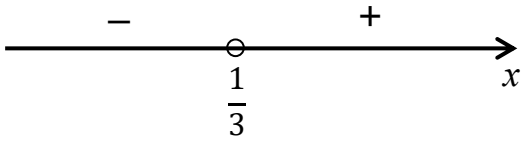
$x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Отметим эту точку на числовой прямой и определим знак производной на промежутках $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ и $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Чтобы определить знак, возьмем любую точку из каждого промежутка и подставим в выражение для производной.

Например, из промежутка $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, т.е. слева от точки $x = \frac{1}{3}$, возьмем значение $x = 0$. Подставляем его в выражение для производной: $f'(0) = 6 \cdot 0 - 2 = 0 - 2 = -2 < 0$ (ставим знак «–»).

Из промежутка $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$, т.е. справа от точки $x = \frac{1}{3}$, возьмем значение $x = 1$. Подставляем его в выражение для производной: $f'(1) = 6 \cdot 1 - 2 = 6 - 2 = 4 > 0$ (ставим знак «+»).




Значит, $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ – промежуток убывания функции (т.к. здесь производная отрицательная: «–»), а $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ – промежуток возрастания функции (т.к. здесь производная положительная: «+»).

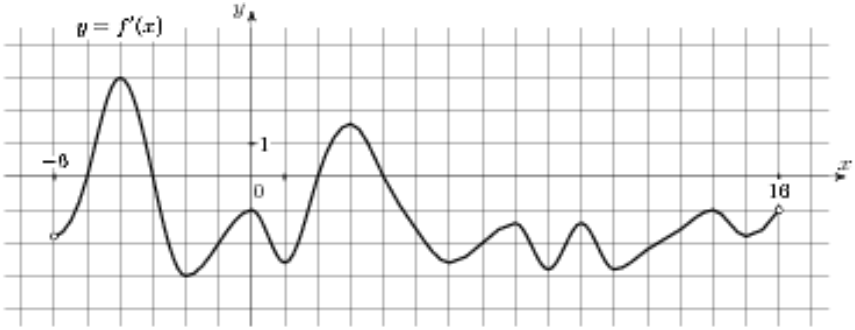
Так как в точке $x = \frac{1}{3}$ производная меняет знак с «–» на «+», то это точка минимума.

**Задание 2.** Выполните практическую работу в соответствии с вашим вариантом. Графики чертить не нужно, записать только решение и ответ. Выполненную практическую работу (без конспекта) необходимо сфотографировать или отсканировать и передать на проверку через классного руководителя. Срок выполнения – до 19 апреля.

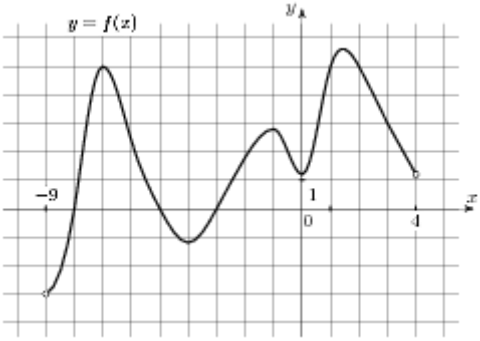
Кожемяко Сергей – 1 вариант
Котляров Руслан – 2 вариант
Кошкина Мария – 3 вариант
Курносова Алена – 4 вариант

***Вариант 1***

1. На рисунке изображен график производной функции $f'(x)$. Найдите:
   1) промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$;
   2) точки экстремума (точки максимума и минимума) функции $f(x)$.



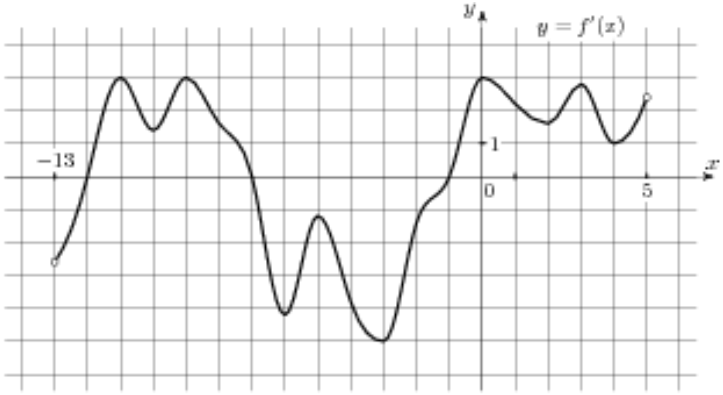

2. На рисунке изображен график функции $f(x)$. Найдите точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю.



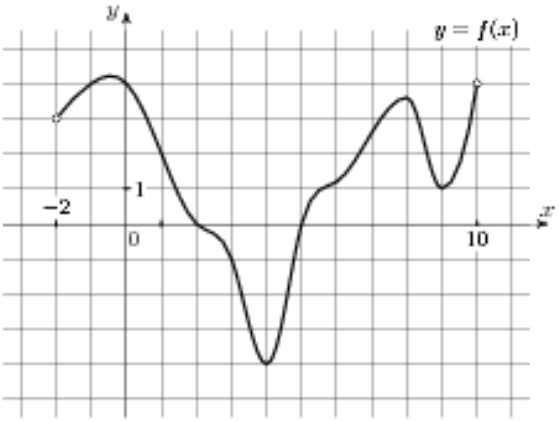
3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = 5x^2 + 4x$. Найдите точку экстремума и определите ее вид (точка максимума или точка минимума).

### *Вариант 2*

1. На рисунке изображен график производной функции $f'(x)$. Найдите:
   1) промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$;
   2) точки экстремума (точки максимума и минимума) функции $f(x)$.



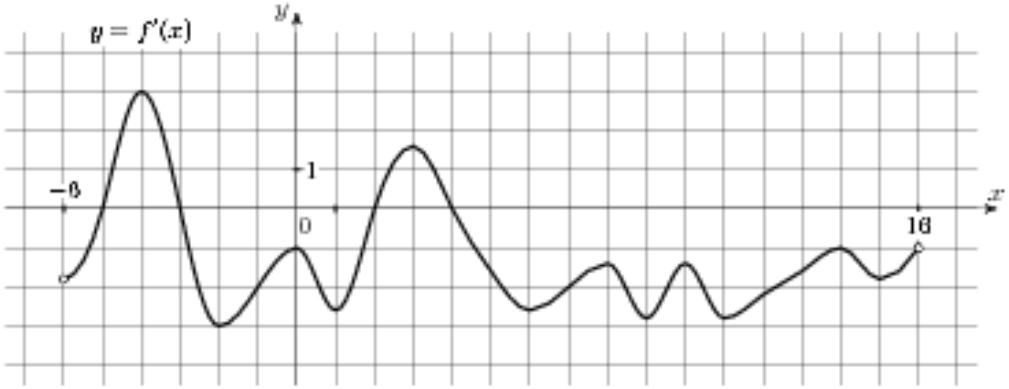

2. На рисунке изображен график функции $f(x)$. Найдите точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю.



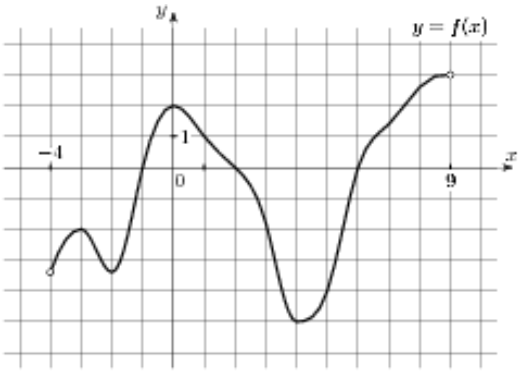

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = 2x^2 + 8x$. Найдите точку экстремума и определите ее вид (точка максимума или точка минимума).

### *Вариант 3*

1. На рисунке изображен график производной функции $f'(x)$. Найдите:
   1) промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$;
   2) точки экстремума (точки максимума и минимума) функции $f(x)$.



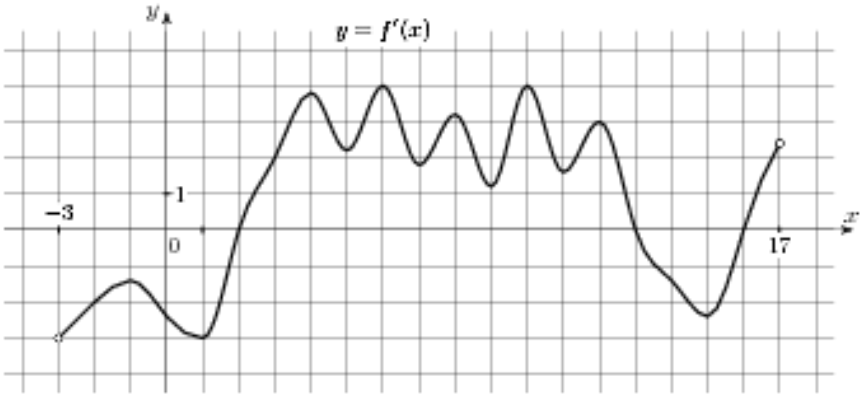
2. На рисунке изображен график функции $f(x)$. Найдите точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю.



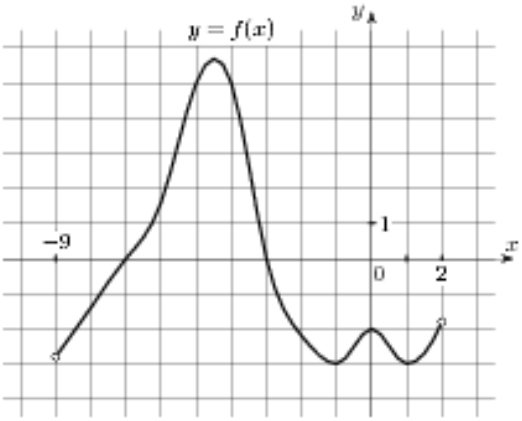

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = 3x^2 - 12x$. Найдите точку экстремума и определите ее вид (точка максимума или точка минимума).

***Вариант 4***

1. На рисунке изображен график производной функции $f'(x)$. Найдите:
   1) промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$;
   2) точки экстремума (точки максимума и минимума) функции $f(x)$.




2. На рисунке изображен график функции $f(x)$. Найдите точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю.




3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = 2x^2 - 20x$. Найдите точку экстремума и определите ее вид (точка максимума или точка минимума).

**Литература:**


1. Учебник Алгебра и начала анализа для 10-11 класса / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров. – М.: Просвещение, 2012. – С.258-266.
2. Российская электронная школа. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Урок 15. Возрастание и убывание функции.
   Режим доступа: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3966/conspect/201134/
3. Российская электронная школа. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Урок 16. Экстремумы функции.
   Режим доступа: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3987/conspect/273809/