Дата 20.04.2020

Преподаватель Богачева М.О.

Специальность 49.02.01 Физическая культура (подготовка обучающихся с инвалидностью и ОВЗ)

Группа Ф-1с

ОУД.04 Математика

Тема занятия: Первообразная. Правила нахождения первообразных.

Задание 1. Изучите и законспектируйте в тетрадь тему «Первообразная. Правила нахождения первообразных».

Конспект занятия

Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Примеры.

1) $F(x) = \sin x$ – это первообразная функции $f(x) = \cos x$, т.к. $F'(x) = (\sin x)' = \cos x$ (по правилу нахождения производных №10, занятие «Правила дифференцирования»).
2) $F(x) = \frac{x^4}{4}$ – это первообразная функции $f(x) = x^3$, т.к. $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = \left(\frac{1}{4} \cdot x^4\right)' = \frac{1}{4} \cdot (x^4)' = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \cdot x^{4-1} = x^3$ (по правилам нахождения производных №2 и №13, занятие «Правила дифференцирования»).

Дифференцирование – это операция нахождения производной.

Интегрирование – это операция нахождения первообразной.

Таблица первообразных

Функция $f(x)$	**Первообразная $F(x)$**	
k (число)	$kx + C$	(1)
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	(2)
$\frac{1}{x}, x > 0$	$\ln x + C$	(3)
e^x	$e^x + C$	(4)
$\sin x$	$-\cos x + C$	(5)
$\cos x$	$\sin x + C$	(6)

Из таблицы видно, что в каждой первообразной присутствует слагаемое C – постоянная величина.

Пример.

Функции $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$ и $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ являются первообразными для функции $f(x) = x^2$. Проверим это:

$$F_1'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^{3-1} = x^2$$

$$F_2'(x) = \left(\frac{x^3}{3}+1\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + (1)' = \frac{1}{3}(x^3)' + 0 = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^{3-1} = x^2$$

Таким образом, у каждой функции существует множество первообразных, поскольку $C' = 0$. Конкретное значение C может быть определено из условия прохождения графика первообразной через заданную точку.

Правила интегрирования

1) Функция $F(x) + G(x)$ является первообразной функции $f(x) + g(x)$.
2) Функция $aF(x)$ является первообразной функции $af(x)$.

Примеры выполнения заданий

1. Проверьте, какие из функций являются первообразными для функции $f(x) = x^5$:

1) $F_1(x) = \frac{x^6}{6}$;
2) $F_2(x) = x^6$;
3) $F_3(x) = \frac{x^6}{6} + 2$;
4) $F_4(x) = \frac{x^6}{6} - 3x$.

Решение.

Найдем производную каждой из функций $F(x)$:

1) $F_1'(x) = \left(\frac{x^6}{6}\right)' = \left(\frac{1}{6}x^6\right)' = \frac{1}{6}(x^6)' = \frac{1}{6}\cdot 6\cdot x^{6-1} = x^5 = f(x)$. Значит, $F_1(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.
2) $F_2'(x) = (x^6)' = 6\cdot x^{6-1} = 6x^5 \neq f(x)$. Значит, $F_2(x)$ не является первообразной для функции $f(x)$.
3) $F_3'(x) = \left(\frac{x^6}{6}+2\right)' = \left(\frac{1}{6}x^6\right)' + (2)' = \frac{1}{6}(x^6)' + 0 = \frac{1}{6}\cdot 6\cdot x^{6-1} = x^5 = f(x)$. Значит, $F_3(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.
4) $F_4'(x) = \left(\frac{x^6}{6} - 3x\right)' = \left(\frac{1}{6}x^6\right)' - (3x)' = \frac{1}{6}(x^6)' - 3\cdot(x)' = \frac{1}{6}\cdot 6\cdot x^{6-1} - 3\cdot 1 = x^5 - 3 \neq f(x)$. Значит, $F_4(x)$ не является первообразной для функции $f(x)$.

2. Найдите все первообразные функции $f(x) = x^2 + 3$.

Решение.

Воспользуемся первым правилом интегрирования (интегрирование суммы) и формулами (1) и (2) из таблицы первообразных:

$F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} + 3x + C = \frac{x^3}{3} + 3x + C$.

3. Найдите все первообразные функции $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$.

Решение.

Воспользуемся правилами интегрирования и формулами (1) и (2) из таблицы первообразных:

$F(x) = 2\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1} - 4\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} + 1x + C = 2\cdot\frac{x^4}{4} - 4\cdot\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{x^4}{2} - 2x^2 + x + C$.

4. Найдите все первообразные функции $f(x) = 2\sin x + \frac{1}{x}$.

Решение.

Воспользуемся правилами интегрирования и формулами (3) и (5) из таблицы первообразных:

$F(x) = 2 \cdot (-\cos x) + \ln x + C = -2\cos x + \ln x + C.$

5. Для функции $f(x) = 2x + 3$ найдите первообразную, график которой проходит через точку (1; 2).

Решение.

Найдем первообразную заданной функции, воспользовавшись правилами интегрирования и формулами (1) и (2) из таблицы первообразных:

$F(x) = 2 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + 3x + C = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + C = x^2 + 3x + C.$

Найдем число C, такое, чтобы график функции $y = x^2 + 3x + C$ проходил через точку (1; 2). Для этого подставим координаты точки $x = 1$ и $y = 2$ в выражение для первообразной:

$2 = 1^2 + 3 \cdot 1 + C$

$2 = 1 + 3 + C$

$2 = 4 + C$

$C = 2 - 4$

$C = 2.$

Значит, $F(x) = x^2 + 3x + 2.$

Задание 2. Выполните упражнения, используя приведенные выше примеры. Выполненную работу (без конспекта, только задания) необходимо сфотографировать или отсканировать и передать на проверку через классного руководителя. Данная работа не оценивается, проверяется только ее выполнение. Срок выполнения – до 22 апреля.

1. Проверьте, какие из функций являются первообразными для функции $f(x) = x^4$:

1) $F_1(x) = x^5$;
2) $F_2(x) = \frac{x^5}{5}$;
3) $F_3(x) = \frac{x^5}{5} - 1$;
4) $F_4(x) = \frac{x^5}{5} + 2x$.

2. Найдите все первообразные для следующих функций:

1) $f(x) = x^4 + 7$;
2) $f(x) = 3x^2 - 2$;
3) $f(x) = 2x^5 - 4x^3$;
4) $f(x) = 6x^2 - 8x + 4$.

3. Для функции $f(x) = 4x - 1$ найдите первообразную, график которой проходит через точку (–1; 4).

Ответы для самопроверки:

1. $F_2(x) = \frac{x^5}{5}$, $F_3(x) = \frac{x^5}{5} - 1$.

2. 1) $F(x) = \frac{x^5}{5} + 7x + C$; 2) $F(x) = x^3 - 2x + C$; 3) $F(x) = \frac{x^6}{3} - x^4 + C$;
4) $F(x) = 2x^3 - 4x^2 + 4x + C$.

3. $F(x) = 2x^2 - x + 1$.

Литература:

1. Учебник Алгебра и начала анализа для 10-11 класса / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров. – М.: Просвещение, 2012. – С.287-292.
2. Российская электронная школа. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Урок 21. Первообразная.
   Режим доступа: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4924/conspect/225712/
3. Российская электронная школа. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Урок 22. Правила вычисления первообразной.
   Режим доступа: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3993/conspect/225743/