ДПО: Организация образовательной деятельности в области математики
Курс: 1
Преподаватель: Радченко А.А.
Лекция №1 Аналитическая геометрия на плоскости

Раздел I. Элементы векторной алгебры

Тема: Определение вектора. Линейные операции над векторами.

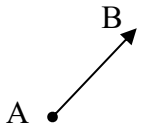
1. Определение вектора.

В математике величина делится на скаляры и векторы. Скалярные величины определяются только числом, векторные величины определяются не только по числам, но и по направлению.

<u>Определение 1</u>. *Вектором* называется направленный отрезок (или, что то же упорядоченная пара точек).

Направленный отрезок *– отрезок, для которого указан порядок следования его концов.*

Обозначают:



$\overline{AB}$ (точка А – начало вектора, точка В – конец вектора или одной буквой $\vec{a}$)

<u>Определение 2.</u> *Длинной вектора (модулем)* называется расстояние между началом и концом вектора. Длина вектора обозначается $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

<u>Определение 3.</u> *Нулевым вектором* называется вектор, у которого начало и конец совпадают. Обозначают: $\vec{0}$.

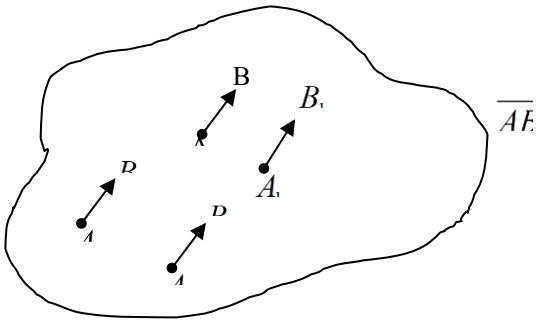
<u>Определение 4.</u> *Единичным вектором* называется вектор, длина которого равна единице.

Единичный вектор, имеющий одинаковое направление с данным вектором $\vec{a}$, называется *ортом* вектора $\vec{a}$ и обозначается обычным символом $\overrightarrow{a_0}$.

В векторной алгебре вводятся понятия свободного вектора, скользящего вектора и связанного вектора.

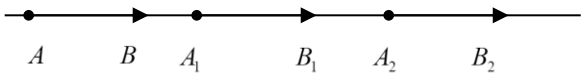
Рассмотрим направляющий отрезок $\overline{AB}$ и отрезки $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$ такие, что они сонаправлены $\overline{AB}$ и их длины равны.

<u>Определение 5.</u> Множество таких сонаправленных отрезков одинаковой длины называется *свободным вектором* $\overrightarrow{AB}$. Каждый направленный отрезок называется представителем свободного вектора.



В дальнейшем будем рассматривать только свободные векторы. Ясно, что весь вектор изобразить нельзя, так как это бесконечное множество, поэтому мы будем рассматривать одного представителя свободного вектора.

<u>Определение 6.</u> Множество сонаправленных отрезков одинаковой длинны, лежащих на одной прямой называется *скользящим вектором***.**



<u>Определение 7.</u> *Связанным вектором* называется направленный отрезок.

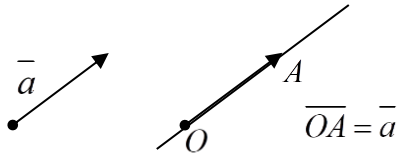
<u>Определение 8.</u> Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены по одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

<u>Определение 9.</u> Векторы называются *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и одинаковое направление.

2. **Линейные операции над векторами**
   1) Откладывание вектора от точки.

.

Отложим данный вектор $\bar{a}$ от точки O

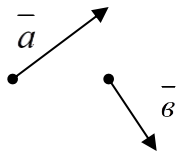


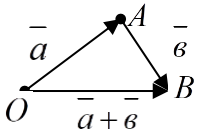
   2) Сложение векторов.

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{в}$ можно сложить

a) <u>по правилу треугольника</u>.

При этом векторы откладываются последовательно, друг за другом, тогда их суммой будет вектор идущий от начала вектора $\bar{a}$ к концу вектора $\bar{в}$.



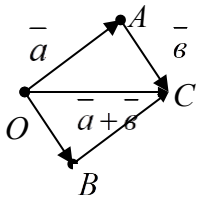


1. $\overline{OA} = \bar{a}$
2. $\overline{AB} = \bar{в}$
3. $\bar{a}+\bar{в} = \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$

b) <u>по правилу параллелограмма</u>.

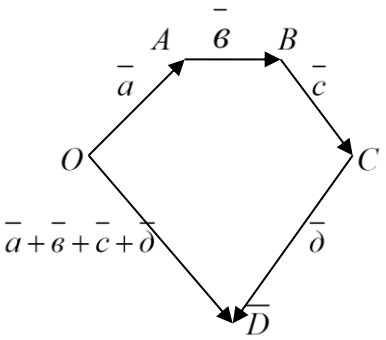
При этом векторы откладываются от одной точки, тогда их суммой будет вектор, идущий от этой точки к противоположной вершине параллелограмма, построенного на этих векторах.

1. $\overline{OA} = \bar{a}$
2. $\overline{OB} = \bar{в}$
3. $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} = \bar{a}+\bar{в}$



По правилу параллелограмма коллинеарные векторы складывать нельзя.

Несколько векторов складываются <u>по правилу многоугольника</u>.

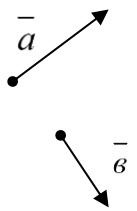


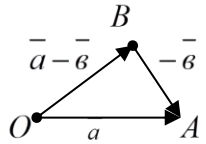
Векторы можно вычитать.

Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{в}$ называется такой вектор $\bar{x}$, что $\underline{\bar{в}+\bar{x}=\bar{a}}$.

Ясно, что по этому определению найти разность двух векторов практически невозможно, поэтому поступают следующим образом: $\bar{a}-\bar{в}=\bar{a}+\left(-\bar{в}\right)$.

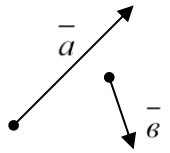
ДПО: Организация образовательной деятельности в области математики
Курс: 1
Преподаватель: Радченко А.А.
Лекция №1 Аналитическая геометрия на плоскости

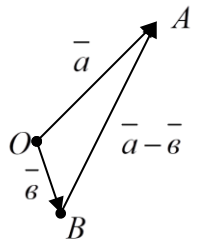




1. $\overline{OA}=\bar{a}$
2. $\overline{AB}=-\bar{в}$
3. $AB=\bar{a}+\left(-\bar{в}\right)=\bar{a}-\bar{в}$

Можно поступить иначе: отложить оба вектора от одной точки, тогда их разностью будет вектор, идущий от конца вычисляемого к концу уменьшаемого.





1. $\overline{OA}=\bar{a}$
2. $\overline{OB}=\bar{в}$
3. $\bar{a}-\bar{в}=\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}$

Законы сложения векторов

1^0. $\bar{a}+\bar{в}=\bar{в}+\bar{a}$ - переместительный или коммутативный;

2^0. $\bar{a}+\bar{в}+\bar{c}=\left(\bar{a}+\bar{в}\right)+\bar{c}$ - сочетательный или ассоциативный;

3^0. Для любого вектора $\bar{a}$ существует такой вектор $\bar{o}$, что $\bar{a}+\bar{o}=\bar{o}+\bar{a}=\bar{a}$.
$\left(\forall\bar{a}\right)\left(\exists\bar{o}\right)$: $\bar{a}+\bar{o}=\bar{o}+\bar{a}=\bar{a}$

4^0. $\left(\forall\bar{a}\right)\left(\exists\overline{a'}\right)$: $\bar{a}+\overline{a'}=\overline{a'}+\bar{a}=\bar{o}$, $\overline{a'}=-\bar{a}$ - противоположный вектор $\bar{a}$.

3) Умножение вектора на число.

Произведение вектора $\bar{a}$ на действительное число α называется вектор $\bar{p}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{p}$, если $\alpha\geq 0$;
$\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{p}$, если $\alpha<0$.
2) $\left|\bar{p}\right|=\left|\alpha\right|\cdot\left|\bar{a}\right|$

Ясно, что $0\cdot\bar{a}=\bar{0}$.

<u>Например:</u> дан вектор $\bar{a}$, найти $3\bar{a}$, $-2\bar{a}$.

Законы произведения вектора на число.

1^0. умножение вектора на действительное число ассоциативно, т.е. для
$\left(\forall\alpha,\beta\right)\left(\forall\bar{a}\right)$: $\left(\alpha\beta\right)\bar{a}=\alpha\left(\beta\bar{a}\right)$;

2^0. умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению чисел, т.е. для
$\left(\forall\alpha,\beta\right)\left(\forall\bar{a}\right)$: $\left(\alpha+\beta\right)\bar{a}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{a}$;

3^0. умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению векторов, т.е. для
$\left(\forall\alpha\right)\left(\forall\bar{a},\bar{b}\right)$: $\alpha\left(\bar{a}+\bar{b}\right)=\alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}$;

4^0. умножение вектора $\bar{a}$ на единицу не меняет этого вектора: $1\cdot\bar{a}=\bar{a}$.

<u>Теорема 1.</u> (*о коллинеарных векторах*). Если $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ - два неколлинеарных вектора, причем вектор $\overline{e_1}$ - ненулевой, то существует единственное число x такое, что $\overline{e_2}=x\overline{e_1}$.

В частности, ненулевой вектор a и его орт $\overline{a_0}$ связаны равенством: $\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \overline{a_0}$.

Задание.

1. Изучить конспект.
2. Решить следующие задания:

1) В треугольнике ABC вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$ и вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$. Построить каждый из следующих векторов: $\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$; $\frac{\vec{n}-\vec{m}}{2}$.
2) $\overline{AK}$ и $\overline{MB}$ медианы треугольника ABC. Выразить через $\overline{p} = \overline{AK}$ и $\overline{q} = \overline{MB}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.

Выполненные задания выслать в виде фото на почту priem-dpk@yandex.ru до 23.04.2020