Специальность 49.02.01 Физическая культура
Курс 1, база основного общего образования
Группы Ф9-1, Ф9-2, Ф9-3
Дисциплина ОУД.05 Математика
Преподаватель Радченко Антонина Анатольевна

Лекционный материал

Тема: Корень n-ой степени

Определение: корнем n-ой степени из числа ***a*** называется такое число ***b***, n-я степень которого равна ***a.*** Например:

$\sqrt{16} = 4$, $4^2 = 16$;

$\sqrt[3]{27} = 3$, $3^3 = 27$;

$\sqrt[5]{-32} = -2$, $(-2)^5 = -32$;

Свойства корней

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$,
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$,
3. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$,
4. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$,
5. $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$,
6. $\sqrt[n]{a^n} = a$,
7. Для любых чисел ***a*** и ***b***, таких, что $0 \le a < b$, выполняется неравенство $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$,
8. $a^0 = 1$,
9. $a^1 = a$.

Примеры:

а) $\sqrt[4]{16 \cdot 625} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{625} = 2 \cdot 5 = 10$;

б) $\sqrt[5]{160 \cdot 625} = \sqrt[5]{32 \cdot 5 \cdot 625} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{3125} = 2 \cdot 5 = 10$;

в) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Задачи для самостоятельного решения

а) $\sqrt[5]{32 \cdot 243} =$

б) $\sqrt[3]{75 \cdot 45} =$

в) $\sqrt[3]{-25} \cdot \sqrt[6]{25} =$

Тема: Иррациональные уравнения

Определение: уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называются ***иррациональными.***

Примеры:

1. $\sqrt{2x-3} = 5$;

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 = 5^2$;

2x – 3 = 25;

2x = 28;

X = 14.

Проверка:

$\sqrt{2 \cdot 14 - 3} = 5$;

$\sqrt{25} = 5$;

5 = 5.

Ответ: 14.

2. $\sqrt{\boldsymbol{x}}$ = x – 2;

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (x-2)^2$;

$x = x^2 - 4x + 4$;

$x^2 - 5x + 4 = 0$;

$x_1 = 4$; $x_2 = 1$.

Проверка:

X = 4: $\sqrt{4} = 4 - 2$;

2 = 2.

X = 1: $\sqrt{1} = 1 - 2$;

$1 \neq -1$ корень x = 1 – посторонний корень.

Ответ: 4.

3. $\sqrt{2x^2 + 5x - 3} = 2x - 1$;

$2x^2 + 5x - 3 = 4x^2 - 4x + 1$;

$2x^2 - 9x + 4 = 0$;

$D = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 81 - 32 = 49$, 2 корня.

$x_1 = \frac{9+7}{4} = 4$,

$x_2 = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2}$.

Проверка:

x =4: $\sqrt{2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 - 3} = 2 \cdot 4 - 1$;

$\sqrt{49} = 7$;

7 = 7.

$x = \frac{1}{2}$: $\sqrt{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{2} - 3} = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1$;

$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3} = 1 - 1$;

$0 = 0$.

Ответ: $\frac{1}{2}$; 4.

Задачи для самостоятельного решения

Решить иррациональные уравнения:

1. $\sqrt{2x - 1} = x - 2$;
2. $x = \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 6x + 8}$;
3. $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 5}} = 1$;
4. $\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{x + 9}$.

Тема: Степень и ее свойства

Определение: степенью числа *a>0 с* рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m-целое число, а n-натуральное (n>1), называется число $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Степень числа 0 определена только для положительных показателей степени ($\frac{m}{n}$>0).

Свойства степени:

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
2. $a^r : a^s = a^{r-s}$
3. $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
4. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

Примеры:

Найти значение выражения:

1. $8^{1/2} : 8^{1/6} \cdot 9^{3/2} = 8^{1/2-1/6} \cdot (3^2)^{3/2} = (2^3)^{2/6} \cdot 3^3 = 2^1 \cdot 27 = 54$;

2. $81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-1/3} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-3/5} = (3^4)^{-0,75} + \left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^{-1/3} - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^{-3/5} =$

$3^{-3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{27} + 5 - 8 = -2\frac{26}{27}$.

3. $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$.

4. $\frac{(a+c)^{-3}}{(a+c)^4} = (a+c)^{-7}$.

5. $\frac{x^2}{y^5} : \frac{x^4}{y^7} = \frac{x^2 \cdot y^7}{y^5 \cdot x^4} = \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2$.

6. $\frac{a-в}{a^{\frac{1}{2}}-в^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-в^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{2}}+в^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(a^{\frac{1}{2}}-в^{\frac{1}{2}}\right)} = a^{\frac{1}{2}} + в^{\frac{1}{2}}$.

7. $\frac{a^3b^4c^5}{x^2y^7} : \frac{a^2b^5c^8}{xy^5} = \frac{a^3b^4c^5xy^5}{x^2y^7a^2b^5c^8} = \frac{a}{xy^2bc^3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. $27^{2/3} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5} =$
2. $\frac{(a+b)^3}{(a+b)^{-2}} =$
3. $\left(\frac{(a-b)^5}{(a-b)^2}\right)^4 =$
4. $x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{y} =$

Тема: Логарифм и его свойства

Определение: логарифмом положительного числа **b** по основанию **a** (a>0, a≠1) называется показатель степени **x**, в которую надо возвести число **a**, чтобы получить число **b.**

Записывается таким образом:

$log_a b = x$

Примеры:

а) $2^5 = 32, поэтому\ log_2 32 = 5;$

б) $2^{-3} = \frac{1}{8}, поэтому\ log_2 \frac{1}{8} = -3;$

в) $5^0 = 1, поэтому\ log_5 1 = 0.$

Задачи для самостоятельного решения

Представить в виде логарифма:

$3^4 = 81$, ……

$4^{-1} = \frac{1}{4}$, ……

$2^1 = 2$, ……..

$3^{-2} = \frac{1}{9}$, ……

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{log_a b} = b, \text{ где } b > 0, a > 0, a \neq 1.$$

Примеры:

а) $2^{log_2 8} = 8;$

б) $5^{-3log_5 2} = (5^{log_5 2})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}.$

Задачи для самостоятельного решения

$3{,}8^{log_{3,8}11} =$

$4^{2log_4 3} =$

$5^{1+log_5 3} =$

$3^{2-log_3 18} =$

Основные свойства логарифмов.

При любом a>0 (a≠0) и любых положительных x и y выполнены равенства:

1. $log_a 1 = 0.$
2. $log_a a = 1.$
3. $log_a x \cdot y = log_a x + log_a y.$
4. $log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y.$
5. $log_a x^p = p \cdot log_a x.$
6. $log_{a^p} x = \frac{1}{p} log_a x.$
7. *Формула перехода от одного основания логарифма к другому основанию.*

   $log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$. (x>0, a>0, a≠1, b>0, b≠1)

   $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

   Десятичный логарифм: lg x (основание a = 10)

Примеры:

1. Найти x, если $log_5 x = log_5 4 + 2log_5 3 - 3log_5 2.$

$log_5 x = log_5 4 + log_5 3^2 - log_5 2^3$

$log_5 x = log_5 4 + log_5 9 - log_5 8$

$log_5 x = log_5 \frac{4 \cdot 9}{8}$

$log_5 x = log_5 \frac{36}{8}$

$log_5 x = log_5 4{,}5$

$x = 4{,}5.$

2. $\log_2 4^3 = 3\log_2 4 = 3 \cdot 2 = 6$

3. $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$

4. $\log_3 6 - \frac{1}{\log_2 3} = \log_3 6 - \log_3 2 = \log_3 \frac{6}{2} = \log_3 3 = 1$

5. Найти значение выражения: $\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7}$.

$\frac{lg\frac{72}{9}}{lg\frac{28}{7}} = \frac{lg8}{lg4} = \frac{lg2^3}{lg2^2} = \frac{3lg2}{2lg2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

6. $\log_2(\log_2 16) = \log_2 4 = 2$

Задачи для самостоятельного решения

1. $\log_7 49^4 =$
2. $\log_4 64^{-2} =$
3. $\log_{15} 5 + \log_{15} 3 =$
4. $\log_3 36 - \log_3 4 =$
5. $2\log_6 2 + \log_6 9 =$
6. $\log_5 100 - 2\log_5 2 =$
7. $\log_{16} 32 =$
8. $\log_2 3 \cdot \log_3 2 \cdot 7^{2\log_7 3} =$

Тема: Решение показательных уравнений

Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным: $a^x = b$ $(a>0, a\neq1, a^x>0)$.

Уравнение при любом положительном **a**, отличном от **1**, и $b > 0$ имеет единственный корень. Для того чтобы его найти, надо **b** представить в виде $a^x = a^c$. Очевидно, что **c** является решением.

Примеры:

Решить уравнения:

1. $2^x = 8$

   $2^x = 2^3$

   $x = 3$.

   Ответ: 3.

2. $(\frac{1}{2})^x = 2$

   $(\frac{1}{2})^x = (\frac{1}{2})^{-1}$

   $x = -1$

   Ответ: -1.

3. $3^x = 5$

   Уравнение можно записать: $3^x = 3^{\log_3 5}$

   $x = \log_3 5$

   Ответ: $\log_3 5$.

4. $25^x = -25$

   Так как – 25<0, то это уравнение не имеет корней.

   Ответ: нет корней.

5. $7^{x-2} = \sqrt[3]{49}$

   $7^{x-2} = \sqrt[3]{7^2}$

   $7^{x-2} = 7^{\frac{2}{3}}$

   $x - 2 = \frac{2}{3}$

   $x = 2\frac{2}{3}$

   Ответ: $2\frac{2}{3}$.

6. $5^{x^2-2x-1} = 25$

   $5^{x^2-2x-1} = 5^2$

   $x^2 - 2x - 1 = 2$

   $x^2 - 2x - 3 = 0$

   $x_1 = -1;\ \ x_2 = 3.$

   Ответ: $-1; 3.$

7. $6^{x+1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71$

   $6^x \cdot 6^1 + 35 \cdot \frac{6^x}{6^1} = 71$

   $6^x\left(6 + \frac{35}{6}\right) = 71$

   $6^x(\frac{36+35}{6}) = 71$

   $6^x \cdot \frac{71}{6} = 71$

   $6^x = 71 : \frac{71}{6}$

   $6^x = 6$

   x = 1

   Ответ: 1.

8. $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

   $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

   Пусть $2^x = t$, тогда

   $t^2 - 3t + 2 = 0$

   $t_1 = 1;\quad t_2 = 2$

   Обратная замена:

   $2^x = 1$ $\qquad\qquad$ $2^x = 2$

$2^x = 2^0$ $\qquad$ $2^x = 2^1$

$x = 0$ $\qquad$ $x = 1$

Ответ: 0; 1.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1. $27^x = 3$
2. $(\frac{1}{2})^x = -8$
3. $2^x = 7$
4. $5^{x+2} - 2\cdot5^x - 3\cdot5^{x+1} = 200$
5. $9^x - 8\cdot3^x - 9 = 0$

Решение логарифмических уравнений

Уравнение вида $\log_a x = b$ (a>0, a≠1, x>0) называется простейшим логарифмическим уравнением. Для любого **b** данное уравнение имеет, и притом только одно, решение. Из определения логарифма следует, что $\mathbf{a^b}$ является таким решением.

Примеры:

1. $\log_3 x = 4$

   Найдем область определения уравнения:

   $x > 0$

   $\log_3 x = \log_3 81$

   $x = 81$

   Ответ: 81

2. $\log_2(x-5) = 3$

   Найдем область определения уравнения:

   $x - 5 > 0$

   $x > 5$

   $\log_2(x-5) = \log_2 8$

   $x - 5 = 8$

   $x = 13$

   Ответ: 13.

3. $\lg(x-3) + \lg(x-2) = \lg 2$

   Найдем область определения уравнения:

   $\begin{cases} x-3>0, \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x>3.$

$\lg(x-3)\cdot(x-2) = \lg 2$
$(x-3)\cdot(x-2) = 2$
$x^2 - 5x + 6 = 2$
$x^2 - 5x + 4 = 0$
$x_1 = 1$ – не удовлетворяет области определения, $x_2 = 4$
Ответ: 4.

4. $\log_5(2x+3) = \log_5(x+1)$
$\begin{cases} 2x+3>0, \\ (x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>-3, \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1{,}5, \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow x>-1.$
$2x+3 = x+1$
$x = -2$ не удовлетворяет области определения.
Ответ: нет корней.

Задачи для самостоятельного решения

1. $\log_4 x = 3$
2. $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$
3. $\log_2(4x-3) = 3$
4. $\log_3(x^2+2x+3) = \log_3 6$
5. $lg^2x - lgx - 12 = 0$

Тема: Решение показательных и логарифмических неравенств

Примеры:

1. $2^x > 8$
$2^x > 2^3$
$a = 2$, $a > 1$, функция $y = 2^x$ возрастает.
$x > 3$.
Ответ: $(3; +\infty)$.

2. $(\frac{1}{3})^x \geq 27$
$(\frac{1}{3})^x \geq (\frac{1}{3})^{-3}$
$a = \frac{1}{3}$, $0<a<1$, функция $y = (\frac{1}{3})^x$ убывает.
$x \leq -3$.
Ответ: $(-\infty; -3]$.

3. $0{,}5^{2x+1} < 0{,}25$

   $0{,}5^{2x+1} < 0{,}5^2$

   $0<0{,}5<1$, функция $y = 0{,}5^{2x+1}$ убывает.

   $2x + 1 > 2$

   $2x > 1$

   $X > \frac{1}{2}$

   Ответ: $(\frac{1}{2};\ +\infty)$.

4. $\log_{\frac{1}{3}}(5 - 2x) > -2$

   Найдем область определения:

   $5 - 2x > 0$

   $-2x > -5$

   $x < 2{,}5$

   $\log_{\frac{1}{3}}(5 - 2x) > \log_{\frac{1}{3}} 9$

   $0<a<1$, функция убывает.

   $5 - 2x < 9$

   $-2x < 4$

   $x > -2$

   Ответ: $(-2; +2{,}5]$.

5. $\log_5(3x + 1) \leq 2$

   Найдем область определения:

   $3x + 1 > 0$

   $3x > -1$

   $x > -\frac{1}{3}$

   $\log_5(3x + 1) \leq \log_5 25$

   $a > 1$, функция возрастает.

   $3x + 1 \leq 25$

   $3x \leq 24$

   $x \leq 8$

   Ответ: $(-\frac{1}{3}; 8]$

Задачи для самостоятельного решения

1. $5^x > 125$
2. $3^{2x-4} \leq 27$
3. $0{,}3^{4x+3} \geq 0{,}3^{6x-1}$
4. $\log_4 x > 2$

5. $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \leq -4$
6. $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \leq \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^{-4}$
7. $\log_5 x > \log_5(3x-4)$

Используемая литература:

1. Н.В.Богомолов, П.И.Самойленко Математика. Москва, ООО «Дрофа», 2017.
2. Н.В.Богомолов, Л.Ю.Сергиенко Сборник дидактических заданий по математике. Москва, ООО «Дрофа», 2017.
3. Н.В.Богомолов Сборник задач по математике. Москва, ООО «Дрофа», 2017.
4. А.Н.Колмогоров Алгебра и начала анализа. Москва, издательство «Просвещение», 2016.