Тема. Математические предложения

План

1. **Высказывания и высказывательные формы.**
   1.1. Значение истинности высказываний и высказывательных форм.
   1.2. Простые и составные высказывания и высказывательные формы.
   1.3. Логическая структура составного предложения.
2. **Конъюнкция и дизъюнкция высказываний**
   2.1. Таблица истинности высказываний.
   2.2. Конъюнкция и дизъюнкция высказывательных форм.
3. **Высказывания с кванторами.**
   3.1. Квантор общности и значение истинности.
   3.2. Квантор существования и значение истинности.
4. **Отрицание высказываний и высказывательных форм.**
5. **Отношения следования и равносильности.**
6. **Структура и виды теорем.**
   6.1. Теорема, правила, формулы
   6.2. Виды теорем.
   6.3. Закон контрпозиции
7. **Основные выводы**

Содержание

1. Рассмотрим некоторые предложения из учебников математики начальных классов.

1) «1 + 9 = 20 – 10. Это равенство»
2) 37 + 6 > 37
3) 20 + 8 < 20
4) «некоторые числа делятся на 5»
5) 5 + x = 9

Определим истинны ли они или ложные.

Предложения 1,2,4 – истинные
Предложение 3 – ложное
} *высказывания*

Предложение 5 – $\underbrace{\text{нельзя указать истинное оно или ложное}}_{\textit{Высказывательная форма}}$

Высказывание – предложение, относительно которого имеет смысл вопрос: истинно оно или ложно.

Высказывательная форма – предложение с одной или несколькими переменными, которое обращается в высказывание при подстановке в него значений переменной.

Высказывательная форма

а + в = с

одноместная в.ф.

а+ 3 =5

двухместная в.ф.

а + в = 5

и т.д.

1.1. Обозначения: А – «И» - высказывание А – истинно

В – «Л» - высказывание В – ложно

«И», «Л» - *<u>значения истинности высказывания.</u>*

Множество истинности высказывательной формы – это значения переменной, которые обращают высказывательную форму в истинное высказывание.

Пример: определить множество истинности высказывательной формы $x < 6$, если

а) $x \in N$ б) $x \in Z$ в) $x \in R$

а) Множество истинности – {1,2,3,4,5}

б) Множество истинности – {0,1,2,3,4,5}

в) Множество истинности – {- ∞; 6}

1.2. Выше рассмотренные предложения – **простые или элементарные** предложения.

Из двух простых предложений можно составить новые предложения с помощью союзов «и», «или»…

Логическая связка – «и», «или», «если,…то», «не», «тогда и только тогда, когда».

Составные предложения – это предложения, образованные из элементарных с помощью логических связок.

1.3. Для определения логической структуры составного предложения необходимо установить:

1) Из каких элементарных предложений оно образовано;
2) С помощью, каких логических связок оно образовано.

Пример: 1) $x \geq 7$ – это составная высказывательная форма.

Логическая структура: «**А или В**»

Элементарные высказывательные формы – А – «$x > 7$»

В - «$x = 7$»

Логическая связка – «или»

2) «если треугольник равнобедренный, то углы при основании в нем равны» - это составное высказывание.

Логическая структура: «**Если А, то В**»

Элементарные предложения: А – «треугольник равнобедренный»

В – «углы при основании равны»

Логические связки: «Если ……, то».

3) «Число 25 четное и делится на 5»

Логическая структура – «**А и В**»

Элементарные высказывательные формы – А – «25 – четное число»

В – «25 – делится на 5»

Логическая связка – « и »

2. **Проблема**: «Как определить значение истинности составных предложений?»

Составное высказывание вида «А и В» называют конъюнкцией (лат. «соединение»), обозначают А $\wedge$ В.

Определение. Конъюнкцией высказываний А и В называется высказывание А $\wedge$В, которое истинно, когда оба высказывания истинны, и ложно, когда хотя бы одно из высказываний ложно.

Пример: **А – «Л»**
В – «И» $\Rightarrow$ А $\wedge$В – «Л» (по определению)

Составные высказывания вида «А или В» называют дизъюнкцией (лат. «разделение»), обозначают $A \vee B$.

Определение. Дизъюнкцией высказываний А и В называется высказывание $A \vee B$, которое истинно, когда истинно хотя бы одно из высказываний, и ложно, когда оба высказывания ложны.

Пример: «Число 25 делится на 5 или на 3».

А – «25 делится на 5»

В – «25 делится на 3»

Логическая связка – или

Логическая структура - $A \vee B$

А – «И» $\Rightarrow$– $A \vee B$ «И» (по определению)

В – «Л»

2.1. Составим **таблицу истинности** конъюнкции и дизъюнкции.

А	**В**	**$A \wedge B$**	**$A \vee B$**
И	И	И	И
И	Л	Л	И
Л	И	Л	И
Л	Л	Л	Л

2.2. Конъюнкцию одноместных высказывательных форм обозначают:

$A(x) \wedge B(x)$

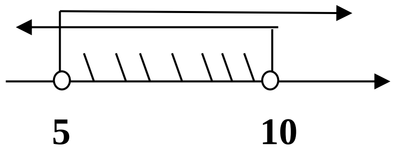
Высказывательная форма $A(x) \wedge B(x)$ обращается в истинное высказывание, если обращаются в истинное высказывание обе высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$ при значениях x из области определения X.

Пример: $\begin{cases} x + 3 < 13 \\ 3x > 15 \end{cases}$ $A(x) – x+3<13$

$B(x) – 3x > 15$

Логическая структура **A(x) $\wedge$B(x)**

$$\begin{cases} x < 10 \\ x > 5 \end{cases}$$



Ответ: A(x) $\wedge$B(x) – «И» при x $\in$ (5;10).

Дизъюнкцию одноместных высказывательных форм обозначают:

A(x) $\vee$B(x)

Высказывательная форма A(x)$\vee$B(x) обращается в истинное высказывание, при тех значениях x из области определения X, при которых обращается в истинное высказывание хотя бы одна из высказывательных форм.

Пример: (x + 7) (x - 4) = 0

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю.

A(x) – x + 7=0

B(x) – x – 4 =0

Логическая структура: A(x) $\vee$ B(x)

x +7=0   или   x – 4 =0

x = - 7   x=4

Ответ. A(x) $\vee$ B(x) - И при x $\in$ (-7;4).

3. Превратить высказывательную форму «x – четное число» в высказывание.

1. Подставить вместо x значение.

«6 – четное число» - «И»

«5 – четное число» - «Л»

2. Перед высказывательной формой поставим слово «всякое» или «некоторое»

«Всякое x – четное число» - «Л»

«Некоторое x – четное число» - «И»

3.1. **Квантор существования –** это выражения «существует», «некоторые», «найдется», «есть», «хотя бы один».

Обозначение: $\exists$ x – «существует x»

($\exists$ x) Ax – «существует такое значение x, что A(x) – истинное высказывание».

Истинность высказывания с квантором **существования** устанавливается при помощи **конкретного примера, а ложность - доказывается.**

Пример: «Некоторые прямоугольные треугольники являются равносторонними».

Высказывание содержит квантор существования – «некоторые» и оно – «Л». Это необходимо доказать.

В равностороннем треугольнике все углы по 60°, а в прямоугольном один из углов - 90°. Следовательно, ни один прямоугольный треугольник не может быть равносторонним.

3.2. **Квантор общности** – это выражения «всякий», «любой», «каждый» и «все».

Обозначение**: $\forall$x –** для всякого x.

($\forall$x) A(x) – «для всякого x предложения **A(x)** – истинное высказывание».

Истинность высказывания с квантором общности устанавливается путем доказательства, а ложность – контрпример.

Пример: «Всякое натуральное число делится на 2 » высказывание содержит квантор общности – «всякое и оно – Л, т.к. «3 не делится на 2» - контрпример.

В математике часто приходится строить предложения в которых что – либо отрицается.

Пример: «15 – простое число» А – Л

Построим отрицание высказывания: «неверно, что 15 простое число» - И

Обозначение: $\bar{A}$ читают: «Не А» или «Неверно, что А».

Определение. **Отрицанием высказывания** А называется высказывание $\bar{A}$, которое ложно, если высказывание А истинно, и истинно, если высказывание А- ложно.

A	$\bar{A}$
И	Л
Л	И

4. Отрицании конъюнкции и дизъюнкции

Законы де Моргана

$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$

$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$

Чтобы построить отрицание конъюнкции (дизъюнкции), достаточно заменить отрицаниями составляющие её высказывания, а союз «и» («или») заменить союзом «или» («и»).

Пример: «Число 15 – нечетное и делится на 5». Построить отрицание высказывания.

Решение

$A \wedge B$ – И

I. способ. $\overline{A \wedge B}$ - «Неверно, что 15 – нечетное число и делится на 5». $\overline{A \wedge B}$ - Л$\Rightarrow$ оно является отрицанием высказывания А.

II. способ. Воспользуемся законом де Моргана

$$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$$

«Число 15 – четное или не делится на 5» - Л

Отрицание высказываний с кванторами

Отрицание высказывания с квантором можно построить двумя способами:

1) перед высказыванием ставится слова «неверно что»;

2) квантор общности (существования) заменяется квантором существования (общности), а предложение, стоящее после квантора заменяется его отрицанием.

Пример: Построить отрицание высказываний

а) А – «Всякий многоугольник является четырехугольником» - Л – высказывание с квантором общности.

I. способ. Ā – «Неверно, что всякий многоугольник является четырехугольником» - И

А – Л $\Rightarrow$ Ā построено верно

Ā – И

II. способ. Ā - «Некоторые многоугольники не являются четырехугольниками» - И

А – Л $\Rightarrow$ Ā построено верно

Ā - И

б) А – «Некоторые свойства квадрата присущие прямоугольнику» - И – высказывание с квантором существования.

I. способ. Ā - «Неверно, что некоторые свойства квадрата присущи прямоугольнику».

А – И $\Rightarrow$ Ā построен верно

Ā – Л

II. способ. Ā - «Всякое свойство квадрата не присуще прямоугольнику» - Л

А – И

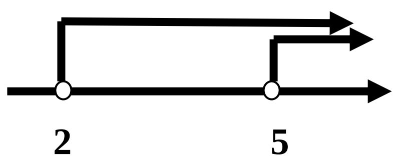
Ā– Л

5. Отношения следования и равносильности

Рассмотрим высказывательные формы:

A(x) – «x >5»

B (x) – «x >2»



- Как связаны между собой?

Можно утверждать:

- «Все числа больше пяти больше двух» или
- «из того, что x >5 следует, что x >2 ».

Определение. Высказывательная форма В (х) следует из высказывательной S формы А (х), если В (х) обращается в истинное высказывание при всех тех значениях х, при которых А (х) истинна.

Обозначение: $A(x) \Rightarrow B(x)$

Читают:

- Из А(х) следует В;
- Всякое А(х) есть В(х);
- Если А (х), то В(х);
- В(х)есть следствие А(х);
- А(х) – достаточное условие для В (х)
- В(х) – необходимое условие для А(х)
- Как установить истинность предложения $A(x) \Rightarrow B(x)$?

Его можно сформулировать в виде:

«Всякое А(х) есть В(х) »

Имеет место высказывание с квантором общности, значит **истинность** устанавливается путем доказательства, а **ложность** – контрпример.

Рассмотрим высказывания:

А(х) – «треугольник равнобедренный»

В(х) – «Углы при основании треугольника равны »

$A(x) \Rightarrow B(x)$ – **И**

«Если в треугольнике углы при основании равны, то он равнобедренный» - **И**

Говорят: предложения А(х) и В(х) – **равносильны.**

Определение. Предложения А(х) и В(х) **равносильны,** если из предложения А(х) следует предложения В(х), а из предложения В(х) следует предложение А(х).

Обозначение: $A(x) \Leftrightarrow B(x)$

Читают:

- А(х) равносильно В(х)
- А(х) тогда и только тогда, когда В(х)

– A(x) – необходимое и достаточное условие B(x)

– B(x) – необходимое и достаточное условие A(x)

6.

6.1. **Теорема –** это высказывание, истинность которого устанавливается путем доказательства.

Логическая структура теоремы:

A⇒B, где A и B – высказывательные формы с одной или несколькими переменными.

Предложение A – <u>условие теоремы</u>;

B – <u>заключение.</u>

Теорема. Если a – любое число и n,k – натуральные числа, то справедливо равенство

$$a^{n} * a^{k} = a^{n+k}$$

Для удобства использования теоремой её формулируют в виде правила.

Правило. При умножении степеней с одинаковыми основаниями, основания оставляют прежним. А показатели степеней складывают.

$$\boxed{a^{n} * a^{k} = a^{n+k}}$$

6.2. Пусть дана теорема:

Теорема	**A⇒B**	«Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны» **- И**
Обратная теорема	**B⇒A**	«Если в четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то он является ромбом». **- Л**
Противоположенная теорема	**$\bar{A}$⇒$\bar{B}$**	«Если четырехугольник не является ромбом, то его диагонали не перпендикулярны».**- Л**
Обратная противоположной теорема	**$\bar{B}$⇒ $\bar{A}$**	«Если в четырехугольнике диагонали не перпендикулярны, то четырехугольник не является ромбом».**- И**

Закон контрапозиции

$$(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow(\overline{B}\Rightarrow \bar{A})$$

Всегда когда истинна данная теорема, будет истинна и теорема обратная противоположенной.

7. В результате изучения данной темы необходимо:

Знать:

- понятия: высказывание, высказывательная форма, конъюнкция, дизъюнкция, квантор общности и существования, отношение следования и равносильности;
- теорема и виды теорем.

Уметь:

- определять логическую структуру предложений;
- определять значение истинности высказываний и высказывательных форм;
- составлять таблицу истинности по формуле;
- строить отрицание высказываний и высказывательных форм;
- формулировать различные виды теорем.

Задания для самостоятельной работы

1. Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте разницу между высказыванием и высказывательной формой.
2. Как определить логическую структуру составного предложения?
3. Сформулируйте различие между конъюнкцией и дизъюнкцией.
4. Как определяется истинность конъюнкции и дизъюнкции высказываний и высказывательных форм?
5. Сформулируйте правила определения истинности высказываний с кванторами.
6. Где используется закон де Моргана?

7. Каким образом можно построить отрицание высказываний с кванторами?
8. В каких случаях используют отношение логического следования и равносильности между предложениями?
9. В чем отличие теоремы от правила?
10. Какова логическая структура различных видов теорем?
11. Каким законом связаны различные виды теорем?

2. Задания для практической работы

Стойлова Л.П. Математика: Учебное пособие для студентов средних педагогических учебных заведений «Академия», 1998.

§3, п.16 № 4,5,6,8

п.17 № 1,2,3,5,

п. 18 № 3,4

п. 20 № 5,6,7,9,10

п. 21 № 2,3,4,8

п.22№ 2,5,9,12

п.23 №2,5,6